

Matematika fanidan 2023-yil 1-aprel kuni Qo'qon shahar maktablarining 9-10-11-sinf o'quvchilari o'rtasida o'tkazilgan "Qo'qon olimpiadasi" ning maktab bosqichi uchun berilgan test savollarining javoblari

1. x butun son bo'lsin. Agar $3^{x^4} = 81$ bo'lsa, u holda x^2 qiymatini aniqlang.

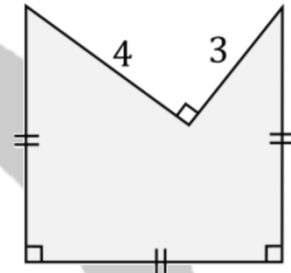
- A) -2 B) 2 C) 3 D) 4 E) yagona yechimni aniqlab bo'lmaydi

Javob: 81 soni 3^4 ga teng ekanligidan $x^4 = 4$ kelib chiqadi. Bundan esa $(x^2)^2 = 2^2$ yoki $x^2 = 2$ kelib chiqadi. Demak to'g'ri javob B.

2. Kvadratdan tog'ri burchakli uchburchak qirqib olingan. Bo'yalgan sohani yuzini hisoblang.

- A) 13 B) 15 C) 17 D) 19 E) 25

Javob: Agar qirqib olingan uchburchakning gipotenuzasini chizib olsak kvadrat hosil bo'ladi va uning tomoni uchburchak gipotenuzasiga teng bo'ladi. Pifagor teoremasidan foydalansak kvadratning tomoni uzunligi 5 ekan kelib chiqadi. Kvadratning yuzi esa 25 bo'ladi. Endi undan qirqib olingan to'g'ri burchakli uchburchak yuzi 6 ni ayirib tashlasak, bo'yalgan soha yuzi 19 ekanligi kelib chiqadi. Demak to'g'ri javob D.



3. 25 ta kichkina kvadratlardan tashkil topgan 5 ga 5 panjara 1, 2 va 3 raqamlari bilan to'ldirilgan bo'lib, bunda gorizontal va vertikal holatda turgan 2ta kvadratchalarda bir xil raqam bo'lmaydi. Kvadrat chetlaridagi kichik kvadratchalar rasmda ko'rsatilganidek raqamlar bilan to'ldirilgan. Markazdagi kvadratchaga qaysi raqam joylashadi?

1	2	3	1	2
2				3
1		?		2
3				1
2	3	1	2	3

- A) 1 B) 2 C) 3 D) Hech bir raqam qo'yib bo'lmaydi E) bir nechta raqam qo'yish mumkin

Javob: Topshiriq shartida 2 ta katakdagi raqamlar bir xil bo'lmasligiga e'tibor qaratamiz. 3 ga 3 kvadratning o'ng burchagidagi raqamlar quyidan 3 va yuqoridan 2 bo'lishini tushunish qiyin emas

1	2	3	1	2
2			2	3
1				2
3			3	1
2	3	1	2	3

Topshiriq shartini, ya'ni yonma-yon kataklarda bir xil raqam bo'lmaslik shartini hisobga olib davom ettiramiz

1	2	3	1	2
2		1	2	3
1			1	2
3		2	3	1
2	3	1	2	3

Endi markazdagi raqam 3 bo'lishi kerakligi kelib chiqadi. Demak to'g'ri javob C.

4. Kimyoviy tadqiqot bilan shug'ullanuvchi Anvarjonda ikkita bir xil A va B stakan bor. B stakan suyuqlik bilan to'la, A stakan esa bo'sh. Anvarjon B stakandagi suyuqlikning uchdan bir qismini A stakanga quydi. Keyin A stakandagi suyuqlikning to'rtidan bir qismini yana B stakaniga quyadi. Nihoyat, u B stakanidagi suyuqlikning yarmini yana A stakaniga quyadi. Bundan keyin A stakanida suyuqlikning qancha qismida suyuqlik bor?

A) 5/8 B) 2/3 C) 7/8 D) 5/6 E) to'g'ri javob yo'q

Javob: Idishlar bir xil ekanini hisobga olib, uning hajmini l bilan belgilaymiz.

1-holat: A stakanda 0 hajmli suyuqlik, B stakanda esa l hajmli suyuqlik bor.

2-holat: A stakanga $\frac{1}{3}l$ hajmli suyuqlik quyildi, shunda B stakanda $\frac{2}{3}l$ suyuqlik qoldi.

3-holat: A stakanda $\frac{1}{3}l - \frac{1}{12}l = \frac{1}{4}l$ hosil bo'ladi, B stakanda esa $\frac{2}{3}l + \frac{1}{12}l = \frac{9}{12}l$ bo'ladi.

4-holat: A stakan $\frac{1}{4}l - \frac{3}{8}l = \frac{5}{8}l$ hosil bo'lsa, B stakanda esa $\frac{3}{4}l - \frac{3}{8}l = \frac{3}{8}l$

Ko'rinib turganidek A stakaning $\frac{5}{8}$ qismida suyuqlik bor ekan. Demak, to'g'ri javob A.

5. A musbat butun son bo'lib, $25^{303} \cdot 8^{202} = \sqrt{A+1}$ tenglik o'rinli. A sonning barcha raqamlari yig'indisini toping.

A) 1 B) 5445 C) 5454 D) 10899 E) 10908

Javob: Tenglikning chap tomonini tub ko'paytuvchilarga ajratib, uni 10 ning darajalari shaklida yozamiz, shunda qaralayotgan sonning raqamlari nechta va qaysi ekanligini tasavvur qilish oson bo'ladi.

$$5^{606} \cdot 2^{606} = \sqrt{A+1}$$

$$10^{606} = \sqrt{A+1}$$

Kvadratga oshirsak,

$$A = 10^{1212} - 1.$$

Birinchi raqami 1 va qolgani 1212 ta noldan iborat sondan 1 sonini ayirsak,

999 999

1211 ta 9 dan iborat son

ko'rinishdagi son hosil bo'ladi. U holda raqamlari 1211 ta 9 dan iborat sonning raqamlari yig'indisi $1211 \cdot 9 = 10899$ bo'lar ekan. Demak tog'ri javob D.

6. 5 ta do'st uchrashib qolishibdi. Har bir kishi qolgan hammaga bittadan olma berdi. So'ng har biri o'ziga berilgan olmalarni yeb qo'ydi. Natijada ulardagi olmalar soni ikki martaga kamaydi. Boshida do'stlarda qancha olma bor edi?

- A) 20 B) 24 C) 30 D) 40 E) 60

Javob: Dastlab har birida ma'lum miqdorda olma bo'lib, ularning yig'indisini x deb olaylik. Ular bir-biriga olma berib o'sha olmalarni yeb qo'yganligini hisobga olamiz, ya'ni masalan, birinchi do'st qolgan 4 tasiga jami 4 ta olma berib, o'zi ham 4 dona olma olgan va ularni yeb qo'ygan. Buni qolganlariga ham tadbiiq qilsak $x - 20$ ta olma qoladi. Bu esa dastlabki olmalarining yarmiga teng, bundan esa

$x - 20 = \frac{x}{2}$ tenglama hosil bo'ladi. Dastlabki olmalar soni, $x = 40$ ekan. Demak to'g'ri javob D.

7. Qurbaqa Lily odatda bir kunda 5 ta o'rgimchak yeydi. Lilyning qorni juda och bo'lsa, u kuniga 10 ta o'rgimchak yeydi. Agar u 9 kunda 60 ta o'rgimchak yesa, necha kun davomida Lily juda och bo'lgan?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 9

Javob: x deb odatdagi kunlar sonini, y deb esa och qolgan kunlar sonini belgilaymiz. Masala shartiga ko'ra $\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 60 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yozib olamiz.

Bu sistemani yechimini topsak, $x = 6$, $y = 3$ bo'ladi. Hulosa qiladigan bo'lsak, qurbaqa Lily qaysidir 3 kunda rosa och bo'lgan ekan. Demak, to'g'ri javob C.

8. Anvar A manzildan B manzil tomon va Bobur esa B manzildan A manzil tomon erta tongda, bir vaqtda, bir biriga qarab o'zgarimas tezlik bilan yo'lga chiqdi. Soat 12:00 da ular uchrashishdi va tezliklarini o'zgartirmasdan yo'llarida davom etishdi. Anvar B manzilga 21:00 da yetib bordi, Bobur esa A manzilga 16:00 da yetib bordi. Ular soat nechada yo'lga chiqishgan?

- A) 4:00 B) 5:00 C) 6:00 D) 7:00 E) Ma'lumot yetarli emas

Javob: Anvarning tezligini x , Boburning tezligini y deb belgilaymiz.



AC masofani S_1 , CB masofani esa S_2 bilan belgilab olamiz. Masala shartiga ko'ra Anvar S_2 masofani 9 soatda, Bour esa S_1 masofani 4 soatda bosib o'tganligidan,

$S_1 = 4y$ va $S_2 = 9x$ bo'ladi. Uchrashuvgacha esa bir xil vaqt sarf qilganliklari uchun

$$\frac{4y}{x} = \frac{9x}{y}$$

ga kelamiz. Bu tenglamadan esa $4y^2 = 9x^2$ yoki $y = \frac{3x}{2}$ ni topamiz. Endi Anvarning uchrashuvigacha qancha vaqt sarflaganini topamiz, ya'ni $S_1 = 4y = 6x$. Tezlikni x bilan belgilaganimizni hisobga olsak, Anvar uchrashuvigacha 6 soat vaqt sarflagan ekan, Uchrashuv vaqti 12:00 bo'lgani uchun, Anvar ertalab soat 6:00 da yo'lga chiqqani kelib chiqadi. Demak tog'ri javob C.

9. Javondagi 8 ta kitobni necha xil usul bilan o'rinlarini almashtirib qo'yish mumkin?
A)120 B) 720 C) 40320 D) 5040 E) 362880

Javob: Faraz qilaylik, javonda 2 ta kitob bor u holda ularni jami 2 xil usul bilan javonga qo'yish mumkin, $1 \cdot 2 = 2!$ ya'ni AB, BA.

3 ta kitob bo'lsa, 6 ta yoki $2 \cdot 3 = 3!$, ya'ni ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, ABA.

4 ta kitob bo'lsa, 24 ta bo'ladi,

ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB,
BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA

Demak, $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

Ushbuni davom ettirib, qonuniyatni toppish mumkinki, n ta kitobni o'rinlarini almashtirishlar soni $n!$ ga teng bo'ladi. Bundan esa 8 ta kitobning o'rin almashtirishlar soni $8!$ ga yoki 40320 ga teng bo'ladi. Demak tog'ri javob C.

10. Sehrgarning bog'ida 30 ta hayvon bor: kuchuklar, mushuklar va sichqonlar. Sehrgar 6 ta kuchukni mushukka aylantirib qo'ydi, keyin u 5 ta mushukni sichqonga aylantirib qo'ydi. Endi uning bog'idagi kuchuklar, mushuklar va sichqonlarning soni teng. Mushuklarning boshlangich sonini toping?

- A) 4 B) 5 C) 9 D) 10 E) 11

Javob: Belgilaymizki x kuchuklar, y mushuklar va z esa sichqonlar soni bo'lsin. Sehrgar 6 ta kuchukni mushukka aylantirsa kuchuklar soni $x - 6$, mushuklar soni esa $y + 6$ bo'ladi.

So'ngra sehrgar 5 ta mushukni sichqonga aylantirsa, mushuklar soni $y + 6 - 5 = y + 1$, sichqonlar soni esa $z + 5$ bo'ladi. Shundan so'ng kuchuklar, mushuklar va sichqonlar soni o'zaro teng bo'lganligi va ularning barchasi 30 ta ekanligi uchun $y + 1 = 10$ bo'ladi. Bu tenglamadan esa $y = 9$ bo'ladi. Dastlab mushuklar soni 9 ta bo'lgan ekan. Demak, tog'ri javob C.

11. $x^4 + x^3 + x^2 + x^1 = 0$ va $x \neq 0$ bo'lsa, $x^{20} + x^{10} = ?$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Javob: Tenglama hadlarini umumiy ko'paytuvchilarga ajratamiz.

$$x^3(x+1) + x(x+1) = 0$$

$$x(x+1)(x^2+1) = 0$$

Hulosa qilish mumkinki bu tenglamaning ildizlari, $x = 0$ va $x = -1$ bo'ladi. Ammo savol shartida $x \neq 0$ bo'lgani uchun $x = -1$ yechimni olamiz.

Endi $x^{20} + x^{10} = (-1)^{20} + (-1)^{10} = 1 + 1 = 2$ bo'lar ekan. Demak to'g'ri javob B.

12. $p(x) = 3x^4 + ax^2 + b$ ko'phad berilgan bo'lsin, bunda a, b lar haqiqiy sonlar. Faraz qilaylik bu ko'phad aynan uchta turli xil r, s, t haqiqiy ildizlarga ega va $r < s < t$ bo'lsin. Quyidagi fikrlardan qaysi biri to'g'ri bo'lishi kerak?

- A) $r+t=0$ B) $s+t=0$ C) $r \cdot t \geq 0$ D) $r+s \geq 0$ E) to'g'ri javob yo'q

Javob: Faraz qilaylik $p(x) = 0$ tenglamaning ildizi $m > 0$ bo'lsin, u holda $-m$ ham uning ildizi bo'ladi, chunki $p(m) = p(-m)$. Uchta haqiqiy ildizga ega deyilgani uchun uchinchi ildizi 0 bo'ladi. Shuning uchun $r = -m, s = 0, t = m$ ga ega bo'lamiz va bundan esa

$r < s < t$ kelib chiqadi. Endi javob variantlariga e'tibor bersak, $r+t=0$ o'rin bo'lishini anglash mumkin, chunki $-m+0+m=0$ bo'ladi. Topilgan ildizlar qolgan javob variantlarini esa qanoatlantirmaydi. Demak to'g'ri javob A.

13. Hisoblang $\frac{1}{1+2+3+4} + \frac{1}{1+2+3+4+5} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+99}$.

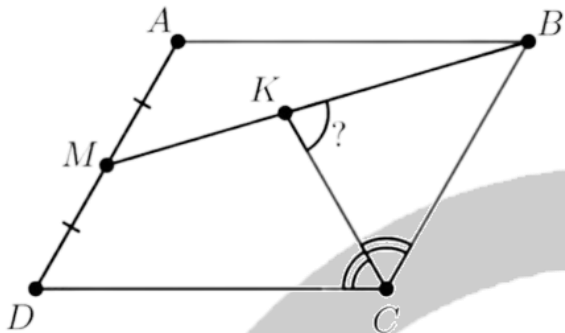
- A) 49/50 B) 1 C) 48/50 D) 24/50 E) 99/100

Javob: Har bir qo'shiluvchining maxrajini hisoblaymiz va quyidagicha hisoblashni amalga oshiramiz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+2+3+4} + \frac{1}{1+2+3+4+5} + \frac{1}{1+2+3+4+5+6} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+99} = \\ & = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \dots + \frac{1}{4950} = \\ & = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \\ & = \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 6} + \frac{2}{6 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 8} + \frac{2}{8 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 100} = \\ & = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = \\ & = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{100} \right) = 2 \cdot \frac{24}{100} = \frac{24}{50}. \end{aligned}$$

Demak, tog'ri javob D.

14. Rasmda ko'rsatilganidek $ABCD$ parallelogram berilgan. $AD = 2$, $AB = \sqrt{3} + 1$ va $\angle D = 60^\circ$ ekanligi ma'lum. Shuningdek M nuqta AD kesma markazida joylashgan va CK kesma C burchakning bissektrissasi hisoblanadi. $\angle CKB$ ni toping.



- A) 45° B) 55° C) 65° D) 75° E) 85°

Javob: Izlanayotgan burchakni y bilan belgilaymiz. Masala shartida $\angle D = 60^\circ$ ekanligidan $\angle A = \angle C = 120^\circ$ kelib chiqadi. So'ngra, $\angle KBC = x$ deb belgilash kiritsak, $\angle KBA = 60 - x$ bo'ladi, chunki $\angle B = 60^\circ$ ekanligi ma'lum. $\angle A = 120^\circ$ ekanligini va uchburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° ga teng ekanligini hisobga olsak, $\angle BMA = x$. Endi ΔBMA uchun sinuslar teoremasini qo'llaymiz.

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sin(x)} = \frac{1}{\sin(60 - x)}$$

Ushbu tenglamadan $x = 45^\circ$ ekanligini topamiz. Endi ΔKCB ning ichki burchaklarini qo'shib 180° ga tenglaymiz. U holda $y + x + 60^\circ = 180^\circ$ yoki $y + 45^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ bundan esa $y = 75^\circ$ kelib chiqadi. Demak tog'ri javob D.

15. Lolani xonasining maydoni Vaziranikidan ikki barobar, Komilaxonnikidan esa uch barobar ko'p maydonlarga ega. Komilaxon polni Vaziraxonning yarim tezligida va Lolaning tezligini uchdan bir qismi tezligida tozalaydi. Agar ularning hammasi bir vaqtning o'zida xonalarini polini tozalashni boshlasa, kim birinchi bo'lib tozalaydi?

- A) Lola B) Vazira C) Komila D) barchasi bir vaqtda E) Lola va Komila bir vaqtda bo'ladi

Javob: x Lola xonasi maydoni deb olsak, Vaziraning xonasini maydoni $\frac{x}{2}$, Komilaniki esa $\frac{x}{3}$ ga teng bo'ladi. Lolaning tozalash tezligi y deb olsak, Komilaniki $\frac{y}{3}$, Vazirani esa $\frac{2y}{3}$ ga teng bo'ladi. Endi har bir qizning sarf qilgan vaqtini hisoblaymiz.

$$t_1 = \frac{x}{y} \text{ Lolaning sarf etgan vaqti, } t_2 = \frac{3x}{4y} \text{ Vaziraning sarflagan vaqti, Komilaniki esa } t_3 = \frac{x}{y}.$$

Hulosa qiladigan bo'lsak, eng kam vaqt t_2 bo'ladi, ya'ni Vazira eng kam vaqt sarflaydi yoki birinchi bo'lib tozalaydi. Demak, to'g'ri javob B.

16. Musbat butun x lar uchun $f(x) = 2x^2$ berilgan va $p \geq 3$ tub son bo'lsin. U holda $f(f(p))$ ning natural bo'luvchilari soni nechta?

- A) 7 B) 8 C) 15 D) 20 E) p ga bog'liq

Javob: $f(f(p)) = 2(2p^2)^2 = 8 \cdot p^4 = 2^3 \cdot p^4.$

p ning 2 dan katta tub son ekanligini hisobga olib, sonning bo'luvchilari sonini topish formulasini qo'llab, $(3 + 1)(4 + 1) = 20$ ekanligini topamiz. Demak to'g'ri javob D.

17. Hisoblang: $\frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 990}$

- A) 6/7 B) 7/8 C) 8/9 D) 9/10 E) To'g'ri javob keltirilmagan

Javob: Har bir kasrning maxrajini o'zining qo'shmasiga ko'paytirib olamiz

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 + \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 990} = \\ & = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6} + \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{4}}{12} + \dots + \frac{100\sqrt{99} - 990}{99 \cdot 100} = \\ & 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Demak, to'g'ri javob D.

18. $a + b + c = 2$ va $abc = 4$ bo'lsa $|a| + |b| + |c|$ ning eng kichik qiymatini toping?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) Hech qaysi to'g'ri emas

Javob: Birinchi va ikkinchi tenglamadan quyidagiga ega bo'lamiz

$$a = \frac{4}{bc}$$

yoki

$$b^2c + bc^2 - 2bc + 4 = 0.$$

Bu tenglamadan esa $b \neq 0$ va $c \neq 0$ kelib chiqadi. Huddi shunday $a \neq 0$ ni ham olish mumkin. Oxirgi tenglamani diskriminantini topamiz

$$D = (c^2 - 2c)^2 - 4 \cdot c \cdot 4 = c^4 - 4c^3 + 4c^2 - 16c = c(c - 4)(c^2 + 4).$$

Diskriminat noldan katta bo'ladigan c ning qiymatlari $(-\infty, 0) \cup [4, \infty)$ ekan.

Demak kvadrat tenglamani b nisbatan yechsak

$$b = \frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2c}$$
$$a = \frac{4}{\frac{c^2-2c}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}}$$

Endi shartga ko'ra $|a| + |b| + |c| = \frac{4}{|c| \left| \frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2c} \right|} + \left| \frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2c} \right| + |c|$

Ushbu $|x| + \frac{4}{|x|} \geq 4$ tengsizlik noldan farqli x lar uchun o'rinli bo'lib $|x| = 1$ da tenglik bajariladi. Bizdan esa yig'indining eng kichik qiymati so'ralgani uchun

U holda

$$\frac{4}{|c| \left| \frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2c} \right|} + \left| \frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2c} \right| + |c| \geq \frac{4}{|c|} + |c|$$

Demak $\frac{c-2}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2} = 1$ bo'ladigan qilib olishimiz kerak ekan. Bu tenglamani ishlasak, $c = 4$ degan yechim chiqadi. Demak,

$$|a| + |b| + |c| \geq \frac{4}{|c|} + |c| = \frac{4}{4} + 4 = 6$$

$|a| + |b| + |c|$ ifodaning eng kichik qiymati 6 ekan.

19. 20 ta odam qatnashayotgan majlis bitta konferensiyaga ikki vakilni saylamoqda. Buni necha usul bilan bajarish mumkin?

- A) 120 B) 150 C) 160 D) 170 E) 190

Javob: Birinchi vakilni 20 kishi ichidan olamiz 2- vakilni esa qolgan 19 kishi ichidan olamiz va bu ikki vakilning o'rinlari almashishi mumkin.

$$\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

20. $2005^{2007^{2009}}$ sonni 7 ga bo'lganda nechchi qoldiq qoladi?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Javob: Bu sonni 7 ga karrali qismlarga ajratib olamiz, ya'ni

$$2005^{2007^{2009}} = 7k + 3^{2007^{2009}} = 7k + 3^{3 \cdot 669 \cdot 2007^{2008}} = 7k + 27^{2007^{2008} \cdot 669} = 7k + (7n - 1)^{2007^{2009} \cdot 669}$$

Ikkinchi ifoda $7A - 1$ ga karrali ekan, A qandaydir son. Endi Shu ifodani 7 ga bo'lgandagi qoldiq

$$7A - 1 = 6 \pmod{7}, \text{ qoldiq } 6 \text{ ekan. Demak tog'ri javob B}$$

21. Agar $f(x) = 1 - x - x^3$ bo'lsa, quyidagi tengsizlikning qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlarini yozing

$$1 - f(x) - (f(x))^3 > f(1 - 5x).$$

Javob: $f(x)$ ga e'tibor beradigan bo'lsak, u kamayuvchi funksiya ekan. Chunki $f'(x) = -1 - 3x^2 \leq 0$. Kamayuvchi funksiyalarda $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik bajariladi.

Shuningdek berilgan tengsizlikning chap tomoni $f(x)$ ekanligini anglash qiyin emas. U holda tengsizlik quyidagi ko'rinishni oladi

$$f(f(x)) > f(1 - 5x)$$

$f(x)$ funksiyaning kamayuvchi ekanligidan

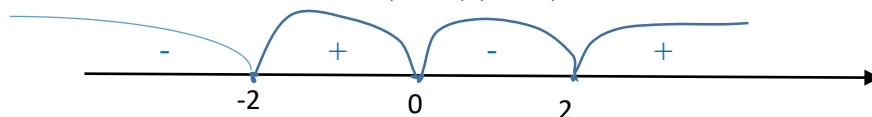
$$f(f(x)) < f(1 - 5x)$$

yoki

$$1 - x - x^3 < 1 - 5x$$

$$x^3 - 4x > 0$$

$$x(x - 2)(x + 2) > 0$$



Shunday qilib tengsizlikning yechimlari $-2 < x < 0$ yoki $x > 2$ bo'ladi. Albatta bu yechimni $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

22. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya uchun shunday c sonning qiymatlarini topingki, har bir $x, y \in \mathbb{R}$ lar uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'lsin.

$$f(f(x) + f(y)) + cxy = f(x + y)$$

$c =$ _____

Javob: Quyidagicha farazni kiritamiz $f(0) = a$. U holda tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$f(a + f(y)) = f(y) \text{ yoki } f(a + f(x)) = f(x).$$

Agar $a \neq 0$ bo'lsa, oxirgi $f(x) = -a$ ni qo'ysak, $f(0) = -a$ ziddiyat kelib chiqadi. SHuning uchun $a = 0$ bo'lishi kerak.

Shuning uchun $a = 0$ da barcha $x \in \mathbb{R}$ lar uchun $f(f(x)) = f(x)$ bo'ladi.

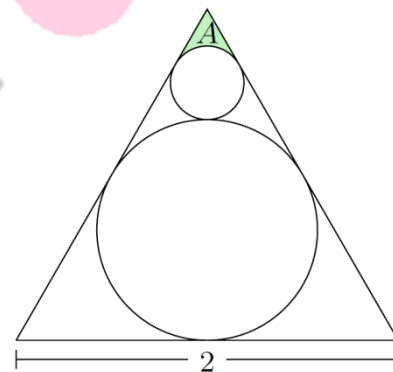
Oxirgi tenglikdan foydalansak, dastlabki berilgan tenglama quyidagi ko'rinishni oladi

$$f(2f(x)) + cf^2(x) = f(2f(x)),$$

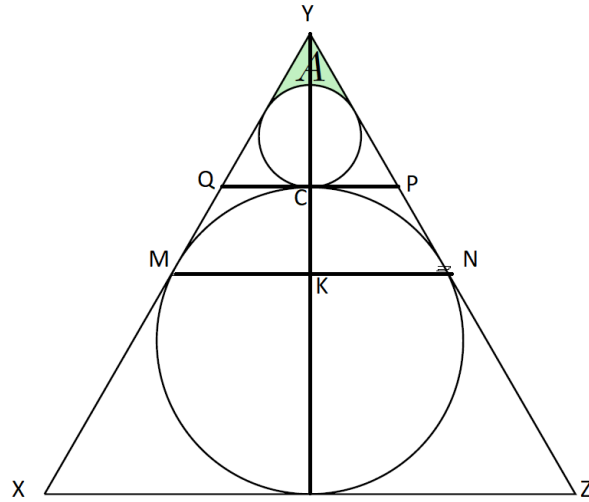
Bundan esa $cf^2(x) = 0$. Agar $c \neq 0$ bo'lsa, $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ bo'ladi va ziddiyatga uchraydi. Lekin bizning holatda $c = 0$ bo'lar ekan. $c = 0$ bo'lganda $f(x) = 0$ va $f(x) = x$ yechimlar ham o'rinli bo'lar ekan. Demak javob $c = 0$.

23. Faraz qilaylik tomoni 2 ga teng teng tomonli uchburchakka aylana ichki chizilgan. Boshqa aylana esa rasmda ko'rsatilganidek uning yuqori qismida uchburchakka ichki chizilgan. Kichkina aylana va uchburchakning yuqori burchagi bilan chegaralangan A soha yuzini toping.

A= _____



Javob: Quyidagicha kesmalar o'tkazib nuqtalarni belgilab olamiz



Aytish joizki, M nuqta XY va N nuqta esa ZY tomonlarning o'rtasida joylashgan va shuning uchun MN (o'rta chiziq) uzunligi 1 ga teng bo'ladi. MN o'rta chiziq va MY=NY=1 ekanligidan MNY uchburchak ham teng tomonli ekanligi kelib chiqadi.

Teng tomonli uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi balandlikni uchburchak uchudan hisoblaganda 2:1 nisbatda bo'ladi, $h = 3r$, Tomoni 2 ekanligidan $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Shuningdek katta aylana markazidan C nuqtagacha bo'lgan masofa va $CY = \frac{1}{\sqrt{3}}$ kesmaga teng bo'ladi.

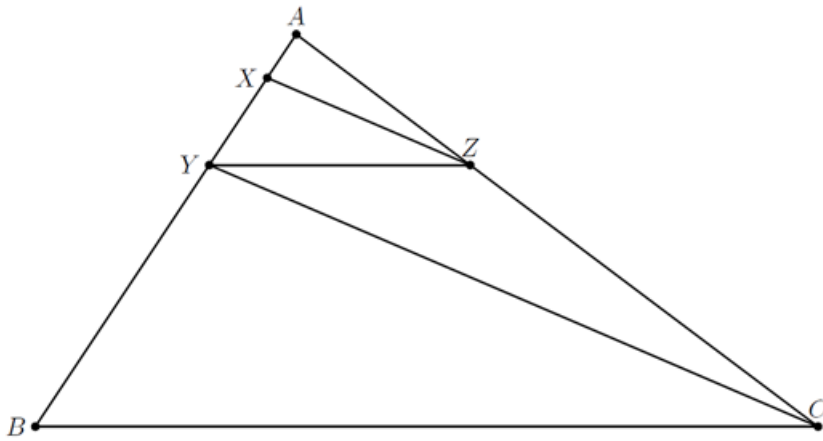
Y burchak 60° ekanligidan va QP ni MN ga parallel ekanligidan YQP uchburchakning teng tomonli ekanligi kelib chiqadi.

Endi kichkina aylana radiusini topaylik. Katta aylana PQ tomon kesishgan nuqtadan Y gacha masofa $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$ teng yoki bu YPQ uchburchakning balandli h_1 ga teng. Teng yonli YPQ uchburchakning balandligi unga ichki chizilgan aylana radiusini 3 tasiga teng ekanidan, ya'ni $h_1 = 3r_1$ yoki $r_1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Endi topilgan qiymatlardan foydalanib YQP uchburchak yuzini $S_{YPQ} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ ekanligini toppish qiyin emas. Bo'yalgan soha yuzini toppish uchun S_{YPQ} dan kichik aylana yuzini ayirib 3 ga bo'lish kifoya, ya'ni

$$S_{boryalgan} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{27} \right) = \frac{1}{9\sqrt{3}} - \frac{\pi}{81}$$

24. ABC uchburchakning yuzi 1 ga teng. AB tomonda X va Y nuqtalar olinganki, $XY = 2AX$. AC tomondan esa shunday Z nuqta borki, XZ tomon YC tomonga parallel va YZ esa BC tomonga parallel. XYZ uchburchakning yuzini toping.

Javob:



E'tibor bersak, AYZ va ABC uchburchaklar o'xshash ekan. Shuning uchun

$$\frac{AY}{AB} = \frac{AZ}{AC} = \frac{AX}{AY} = \frac{1}{3}$$

U holda

$$S_{XYZ} = \frac{2}{3} S_{AYZ} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{9} S_{ABC} = \frac{2}{27}$$

25. Quyidagi tenglamalar sistemasini haqiqiy sonlarda yeching

$$\begin{cases} x^2 y + 2 = x + 2yz \\ y^2 z + 2 = y + 2zx \\ z^2 x + 2 = z + 2xy \end{cases}$$

Javob: Tekshirish mumkinki, ushbu tenglamalar sistemasi (x, y, z) uchun uchta yechimga ega, ya'ni $(-1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$ va $(2, 2, 2)$. Endi biz shu uchala yechimdan boshqa yechim yo'qligini isbotlaymiz.

Har bir tenglamada hadlarning o'rinlarini almashtirib quyidagiga kelimiz

$$x(xy - 1) = 2(yz - 1), \quad y(yz - 1) = 2(xz - 1), \quad z(zx - 1) = 2(xy - 1)$$

Uchala tenglamani bir biriga ko'paytiramiz

$$xyz(xy - 1)(yz - 1)(zx - 1) = 8(yz - 1)(xz - 1)(xy - 1)$$

Bundan esa $xy = 1$ yoki $yz = 1$ yoki $xz = 1$ yoki $xyz = 8$ kelib chiqadi. Har bir topilganlar uchun alohida hisob-kitobni ko'rib chiqamiz.

Birinchi, faraz qilaylik $xy = 1$. Birinchi tenglamadan $x + 2 = x + 2yz$ ga ega bo'lamiz va bundan esa $yz = 1$ ga kelimiz. Huddi shunday qilib $zx = 1$ bo'ladi.

Shunday qilib, $z^2 = yz \cdot \frac{zx}{xy} = 1$, ya'ni $z = -1$ yoki $z = 1$. Agar $z = -1$ bo'lsa, $x = \frac{zx}{z} = -1$ va $y = \frac{xy}{x} = -1$ larni topamiz. Agar $z = 1$ bo'lsa, $x = \frac{zx}{z} = 1$ va $y = \frac{xy}{x} = 1$ larni aniqlashimiz mumkin. Tekshirish mumkinki, agar $zy = 1$ yoki $zx = 1$ deb faraz qilsak ham, huddi yuqoridagidek bir xil yechimlarni olamiz.

Endi esa $xyz = 8$ bo'lgan holni ko'rib chiqamiz. Agar x, y va z lardan ikkitasi manfiy bo'lsa, aytaylik, $x < 0$ va $y < 0$, u holda $y^2z + 2 > 0 > y + 2zx$, bu esa ikkinchi tenglamaga zid. Shu sababli x, y, z lar barchasi musbat bo'lishi kerak ekan.

$(a, b, c) = (\frac{2}{x}, \frac{2}{y}, \frac{2}{z})$ almashtirish bajaramiz. U holda a, b, c musbat haqiqiy sonlar bo'lib $abc = 1$ bo'ladi. O'rta arifmetik qiymatni o'rta geometrik qiymatdan kattaligi haqidagi tengsizlikdan foydalansak, $3a^2 + a \geq 4a^{7/4}$ ni o'rinli ekanligini topamiz va huddi shunday tengsizlikni b hamda c uchun ham yozish mumkin. Endi tenglamalar sistemasini qayta yozib olamiz.

$$\begin{cases} 4c + a = 1 + 4a^2 \\ 4a + b = 1 + 4b^2 \\ 4b + c = 1 + 4c^2 \end{cases}$$

Bundan esa

$$4c = 1 + 4a^2 - a = (1 - a)^2 + 3a^2 + a \geq (1 - a)^2 + 4a^{7/4}.$$

$$\text{Analog holda } 4a \geq (1 - b)^2 + 4b^{7/4} \text{ va } 4b \geq (1 - c)^2 + 4c^{7/4}.$$

Teskaridan fikrlaymiz ya'ni $a = b = c = 1$ bo'lmasin. Aksincha, biz olamiz

$$64 = 4a \cdot 4b \cdot 4c > 4a^{7/4} \cdot 4b^{7/4} \cdot 4c^{7/4} = 64$$

bu esa absurd holat. Demak farazimiz ko'rsatadiki $a = b = c = 1$, ya'ni $x = y = z = 2$.