9-10-11-sinflar uchun "Qo'qon olimpiadasi" ning universitet bosqichi uchun tuzilgan test savollarining yechilishi

1. Sonning oxirgi raqami uning o'zidan 2026 marta kichik. Barcha shunday sonlar yig'indisini toping.

A) 28364 B) 36468 C) 24312 D) 40520 E) 16208

Yechish: Sonning oxirgi raqamlarini 2026 ko'paytirib o'sha oxirgi raqam hosil bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz. Masalan, $1 \cdot 2026 = 2026$ shart bajarilmadi

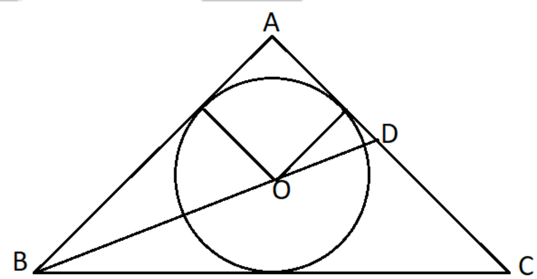
$2 \cdot 2026 = 4052$ shart bajarildi, $3 \cdot 2026 =$.....8 shart bajarilmadi.

$4 \cdot 2026 = 8104$ shart bajarildi, oxiri 5 bilan tugagan son 5 dan 2026 marta katta bo'la olmaydi unaqa sonning oxirgi raqami 0 bo'ladi shartga tushmaydi. $6 \cdot 2026 = 12156$ bajariladi, oxiri 7 bilan tugagan son uchun ham bajarilmaydi, lekin 8 bilan tugagan son 8 dan 2026 marta katta bo'lishi mumkin, ya'ni 16208 da bajariladi. Oxiri 9 bilan tugagan son uchun shart bajarilmaydi. Demak masala shartiga tushadigan sonlar 4052, 8104, 12156 va 16208. Bu sonlarni qo'shib chiqsak 4052+8104+12156+16208=40520 ekan. To'g'ri javob D.

2. Yon tomonlari $AB = AC = 1$ bo'lgan ABC to'gri burchakli uchburchak berilgan. O unga ichki chizilgan aylana markazi bo'lib, aylana uchburchakning barcha tomonlariga urinadi. BO chiziq AC bilan D nuqtada kesishadi. DC kesma uzunligini toping.

A) $\sqrt{2} - 1$ B) 1/2 C) $2 - \sqrt{2}$ D) 3/5 E) $\sqrt{2}/2$

Yechish: To'g'ri burchakli uchburchak bo'lgani uchun Pifagor teoremasidan $BC = \sqrt{2}$ ni topamiz. BD tomon $\angle B$ ning bissektirissasi bo'lgani uchun



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. $DC = x$ va $AD = 1 - x$ desak, u holda

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - x}{x}$$

hosil qilamiz. Bu tenglamadan esa $x = 2 - \sqrt{2}$ ekanligini topamiz. Demak to'g'ri javob C.

3. Tenglik to'g'ri bo'lishi uchun quyida berilgan tenglamada ¤ belgini qaysi son bilan almashtirish kerak? 2 · 18 · 14 = 6 · ¤· 7

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

Yechish: tenglikni chap tomonini ko'paytuchilarga ajratsak ¤ belgining o'rnidagi son 12 ekan. To'g'ri javob D.

4. O‘yin soqqasi (bu kub shaklidagi jism bo‘lib, narda o‘yinida ishlatilishi mumkin, rasmga qarang) har bir yoqlariga birdan oltigacha raqamlab chiqilgan. Bunda qarama-qarshi yoqlardagi sonlar yig‘indisi yettiga teng. Ikkita shunday o‘yin soqqasi tashlandi va aniqlandiki, yuqorisida tushgan bu raqamlar ko‘paytmasi ostida tushgan raqamlar yig‘indisiga teng ekan. Yuqorisida tushgan ochkolar yig‘indisi nechiga teng?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

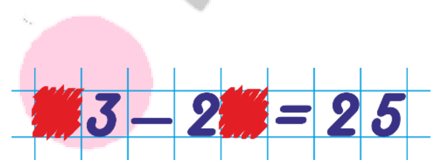
Yechish: Shartga ko‘ra o‘yin soqqasini ustki yoqlarida tushgan ochkolarni x va y desak, ostidagilari mos ravishda $7-x$ va $7-y$ bo‘ladi. Berilgan shartga asosan esa $xy=(7-x)+(7-y)$ tenglik bajariladi. Bu tenglikni $xy+y+x+1=15$ shaklida ham yozish mumkin yoki $y(x+1)+x+1=15$ yoki $(x+1)(y+1)=15$ ga ega bo‘lamiz. Bundan esa $x+1=3$ va $y+1=5$ yoki $x+1=5$ va $y+1=3$ hosil bo’ladi. Natijada esa $x=2$ va $y=4$ yoki $x=4$ va $y=2$ bo‘lishini aniqlaymiz. Shartga ko‘ra $x+y=6$ kelib chiqadi. To‘g‘ri javob B.

5. 2, 0, 1 va 8 raqamlardan foydalanib, ikkita har xil raqamlardan iborat bo‘lgan nechta har xil 10 dan katta va 25 dan kichik bo‘lgan sonlarni hosil qilish mumkin?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Yechish: Bu raqamlardan hosil qilish mumkin bo‘lgan ikkki xonali sonlarni yozib chiqamiz:
10, 12, 18, 20, 21, 28, 81, 80, 82. Shartga asosan esa bulardan faqatgina 12, 18, 20, 21 lar 10 dan katta va 25 dan kichik. Demak jami 4 ta son bu shartni qanoatlantirar ekan. Deamak, to‘g‘ri javob A.

6. Foziljon bitta ikki xonali sonni ikkinchisidan ayirdi, keyin esa 2 ta katakni bo‘yab qo‘ydi. Bo‘yalgan kataklardagi yozilgan raqamlarning yig‘indisini toping?



A) 8 B) 9 C) 12 D) 13 E)15

Yechish: Ustunma-ustun ayirishdan foydalansak ham bo‘yalgan kataklardagi raqamlar 5 va 8 ekanligini toppish mumkin. Yoki ayirmani $x\cdot 10+3-(2\cdot 10+y)=2\cdot 10+5$ yozish mumkin yoki $(x-3)10+13-y=2\cdot 10+5$. Bundan esa $x=5$ va $y=8$ kelib chiqadi. BU raqamlar yig‘indisi esa 13 ekan. To‘g‘ri javob D.

7. Guruhdagi barcha bolalarning yoshlari yig‘indisi 36 ga teng. Ikki yildan so‘ng bu yig‘indi 60 ga teng bo‘ladi. Bu guruhda nechta bolalar bor?

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 24

Yechish: Faraz qilaylik guruhda n bola bor va guruhdagi bolalar yoshlari yig‘indisi $y = 36$. Masala shartiga ko‘ra $2n + 36 = 60$ yoki $n = 12$ kelib chiqadi. To‘g‘ri javob B.

8. Agar $\frac{2^a}{4^b} = 16$ bo’lsa, $a - 2b$ ning qiymatini toping.

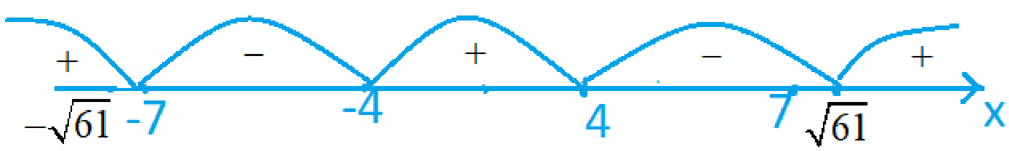
A) 1/4 B) 1/16 C) 8 D) 2 E) 4

Yechish: berilgan ifodani bir xil asosli daraja ko‘rinishda ifodalasak $2^{a-2b} = 2^4$ hosil bo‘ladi. Bundan esa $a - 2b = 4$ ekanligi kelib chiqadi. To‘g‘ri javob E.

9. $\frac{x^2-61}{x^2-16} \leq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlar nechta?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) cheksiz ko‘p

Yechish: Tengsizlikni $\frac{(x-\sqrt{61})(x+\sqrt{61})}{(x-4)(x+4)} \leq 0$ ko‘rinishda yozib olamiz. Bunda $x \neq \pm 4$. Oraliqlar usulidan foydalansak,



Bundan esa tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlarni sanashimiz mumkin: -7, -6, -5, va 5, 6, 7. Demak jami 6 ta butun sonlar tengsizlikni qanoatlantirar ekan. To‘g‘ri javob C.

10. Ushbu $2^4 \cdot 4^8 \cdot 8^{16}$ ifodaning qiymati quyidagi javoblardan qaysi biriga teng?

A 2^{16} B) 2^{52} C) 2^{68} D) 2^{84} E) hech qaysi

Yechish: Ko‘patmadagi har bir ko‘paytuvchini asosi 2 ga teng qilib yozib chiqamiz, shundan so‘ng esa

$$2^4 \cdot 2^{2\cdot 8} \cdot 2^{3\cdot 16} = 2^{4+16+48} = 2^{68}.$$

Demak tog‘ri javob C.

11. Raqamlari yig‘indisi 12 ga teng bo‘ladigan, nechta ikki xonali natural sonlar bor?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Yechish: Raqamlari yig‘indisi 12 bo‘ladigan ikki xonali sonlarni yozib chiqaylik buning uchun yig‘indisi 12 bo‘ladigan raqamlarni yozamiz: 12=9+3=8+4=7+5=6+6=5+7=4+8=3+9. Jami 7 xil shunday sonlarni yozish mumkin ekan. To‘g‘ri javob C.

12. $x^3-10x^2+ax-b=0$ kubik tenglama uchta butun ildizlarga ega bo‘ladigan (a,b) sonlar juftligi nechta?

A) 3 B) 8 C) 10 D) 66 E) to‘g‘ri javob yo‘q

Yechish: Faraz qilaylik $r\le s\le t$ tenglamaning musbat ildizlari bo‘lsin. U holda

$$x^3-10x^2+ax-b=(x-r)(x-s)(x-t).$$

Tenglikni o‘ng tomonini ko‘paytirib yoyilma shaklida yozsak

$$x^3-(r+s+t)x^2+(st+tr+rs)x-rst$$

ifodani hosil qilamiz. Bundan esa $r+s+t=10$ kelib chiqadi. Endi mumkin bo‘lgan uchliklarni yozib chiqamiz: (1, 1, 8), (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4) va (3, 3, 4). Demak to‘g‘ri javob B ekan.

13. Tomonlari 3 sm, 4 sm va 5 sm bo‘lgan parallelopiped shaklidagi yog‘och blok stolning bir tomonida turibdi. Keyin vertikal kesma bilan ikki qismga bo‘linadi. Ikki bo‘lakning sirt maydonlarining mumkin bo‘lgan eng katta yig‘indisi necha (kvadrat sm) bo‘lishi mumkin?

A) 114 B) 119 C) $94+6\sqrt{41}$ D) $94+8\sqrt{34}$ E) 144

Yechish: Eng katta yuzaga ajratish uchun dioganal bo‘ylab ikkiga ajratish kerak. Bunda asosdagi to‘rtburchakning dioganali uzunligi 5 bo‘ladi. Shunda tomonlari 3 ga 5, 4 ga 5 va 5 ga 5 bo‘lgan to‘rtburchaklardan ikkitadan hosil bo‘ladi. Bundan tashqari asos va yuqori yoqlarda tomonlari 3, 4, 5 bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdan jami 4 ta hosil bo‘ladi. Bu yuzalarni hisoblab qo‘shsak

$$2(15+20+25)+4\cdot 6=144.$$

Demak to‘g‘ri javob E.

14. $f(x)=ax^9+bx^5+cx^3-7$ funksiya berilgan bo‘lib, bunda $a,\ b,\ c$ lar haqiqiy sonlar. Agar $f(-9)=9$ bo‘lsa, u holda $f(9)$ ning qiymatini toping.

A) -23 B) -9 C) -5 D) 23 E) ma’lumotla yetarli emas

Yechish:

$$f(9) = a \cdot 9^9 + b \cdot 9^5 + c \cdot x^3 - 7 \tag{1}$$

$$f(-9) = -9 = a \cdot (-9)^9 + b \cdot (-9)^5 + c \cdot (-9)^3 - 7 \tag{2}$$

(1) va (2) tengliklarni qo‘shib, quyidagini olamiz:

$$f(9) + f(-9) = f(9) + 9 = -14.$$

Bundan esa $f(9) = -14 - 9 = -23$ ni topamiz. Demak to‘g‘ri javob A.

15. Agar a va b haqiqiy sonlar $a + b - ab = 1$ tenglikni qanoatlantirsa va a butun son bo‘lmasa, u holda b uchun quyidagilardan qaysi biri to‘g‘ri bo‘ladi?

A) butun son emas B) butun musbat son C) biror manfiy songa teng bo‘lishi kerak
D) 0 ga teng son bo‘lishi kerak E) butun ham kasr son ham bo‘lishi ham mumkin

Yechish: Berilgan tenglamani b ga nisbatan yechamiz

$$a + b(1 - a) = 1$$

$$(1 - a)b = 1 - a$$

$$b = \frac{1-a}{1-a}.$$

a soni butun son emasligidan $1 - a \neq 0$ kelib chiqadi, u holda $b = 1$, ya’ni b soni butun musbat son ekanligi ayon bo‘ladi. To‘g‘ri javob B.

16. Agar k ratsional son bo‘lib, $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} + k\sqrt{2}$ bo‘lsa, u holda k ning qiymatini toping.

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) to‘g‘ri javob berilmagan

Yechish: Berilgan tengliki 3-darajaga ko‘taramiz

$$9\sqrt{3} - 11\sqrt{2} = \left(\sqrt{3} + k\sqrt{2}\right)^3 = 3\sqrt{3} + 9\sqrt{2}\,k + 6k^2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,k^3$$

$$9\sqrt{3} - 11\sqrt{2} = (6k^2 + 3)\sqrt{3} + (2k^3 + 9k)$$

Ayniyat bo‘lganligi uchun, $6k^2 + 3 = 9$ va $2k^3 + 9k = -11$. Bu tenglamalar sistemasini $k = -1$ yechim qanoatlantiradi. Demak to‘g‘ri javob B.

17. Bir muzqaymoq narxi 1 so‘mga teng. Ammo chegirma bilan 5 so‘mga 6 ta muzqaymoq xarid qilishingiz mumkin. Siz 36 so‘mga sotib olishingiz mumkin bo‘lgan muzqaymoqlarning eng ko‘p miqdori qancha?

A) 36 B) 30 C) 42 D) 43 E) 45

Yechish: Masala shartidan muzqaymoqlar miqdori butun son ekanligini tushunish mumkin. 36 so‘m uchun eng ko‘p chegirmadan foydalanilsa, 35+1 ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘ladi. Bunda 35 so‘mga 42 ta chegirma bilan va 1 ta chegirmasiz muzqaymoq olish mumkin. Jami 43 ta. To‘g‘ri javob D.

18. $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$ ko‘paytma ko‘phad ko‘rinishida yoyilsa, x^9 hadning koeffitsiyenti nechaga teng bo‘ladi?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Yechish: ko‘paytuvchilarga yoyib chiqamiz

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) = (1+x^2+x+x^3)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)$$

$$= (1+x^3+x^2+x^5+x+x^4+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5)$$

$$= (1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10})(1+x^5)$$

$$= (1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10})+x^5+x^6+x^7+2x^8+2x^9 =$$

$$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+3x^7+3x^8+3x^9+x^{10}$$

Demak, x^9 ning oldidagi koeffitsiyent 3 ekan.

19. $m^4+n=100000001$ tenglikni qanoatlantiradigan musbat butun sonlardan tuzilgan (m,n) sonlar juftligi nechta?

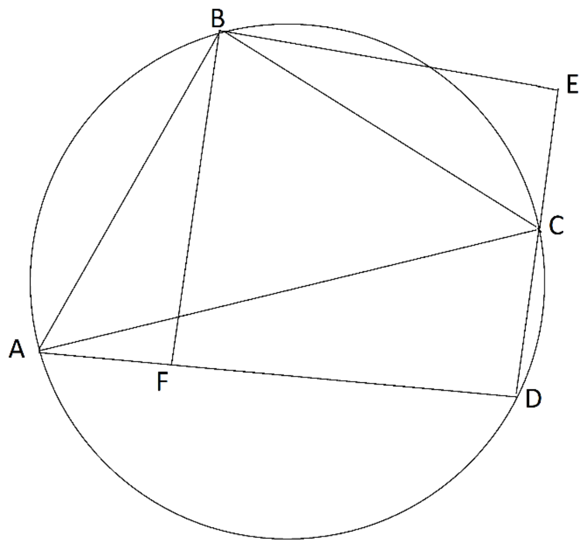
A) 100 B) 101 C) 200 D) 201 E) To‘g‘ri javob keltirilmagan

Yechish: $100^4 = 100\,000\,000$ bo‘lganligidan $(100, 1)$ juftlik shartni qanoatlantiradi. Aslida olib qaralganda m yuzgacha bo‘lgan har qanday musbat butun son bo‘lishi mumkin va shunday musbat butun n son topiladiki $m^4+n=100\,000\,001$ tenglik hususiy m uchun bajariladi. Shuning uchun barcha (m,n) juftliklar soni 100 ta bo‘ladi. To‘g‘ri javob A.

20. AC diametr aylanani ikkita teng yoylarga ajratadi. B shu yoylardan birining markazida yotuvchi o‘rta nuqta, D esa ikkinchi yoyning ixtiyoriy nuqtasi. Agar $ABCD$ to‘rtburchakning yuzi 16 bo‘lsa, u holda B nuqtadan AD tomongacha bo‘lgan masofa qanchaga teng bo‘ladi?

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) aylana markaziga bog‘liq

Yechish:



Avvalo aytish joizki aylana diametriga tiralgan burchak to‘g‘ri burchak bo‘ladi, ya’ni $\angle ADC = \angle ABC = 90°$. Endi B nuqtadan AD va DC tomonlarga balandliklar tushiramiz. ΔABC to‘g‘ri burchakli va teng yonli bo‘lganligi uchun $AB = BC$ va bular o‘z o‘rnida ΔBCE va ΔABF uchburchaklarning gipotenuzalari bo‘ladi. Gipotenuzalari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchaklar teng ekanligidan $\Delta BCE = \Delta ABF$. U holda FBED kvadrat ekanligi kelib chiqadi va uning yuzi ABCD to‘rtburchak yuziga teng. Demak B dan AC tomongacha bo‘lgan masofa yani kvadratning tomoni 4 ekan.

21. $\dfrac{12}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{24}{3^2\cdot 5^2}+\dfrac{36}{5^2\cdot 7^2}+\dfrac{48}{7^2\cdot 9^2}$ yig‘indini qiymatini toping.

____

Yechish: Ushbu yig‘indi $\sum_{k=1}^{n}\frac{12k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$ summaning $n = 4$ bo‘lgandagi husisiy holi ekanligini payqash mumkin. Shuningdek

$$\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{8k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$$

ekanligidan

$$\frac{12k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

bo‘ladi va shundan quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{12k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=$$
$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{6n(n+1)}{(2n+1)^2}$$

$n=4$ bo‘lgani uchun

$$\frac{12}{1^2\cdot 3^2}+\frac{24}{3^2\cdot 5^2}+\frac{36}{5^2\cdot 7^2}+\frac{48}{7^2\cdot 9^2}=\sum_{k=1}^{4}\frac{12k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}=\frac{6\cdot 4(4+1)}{(2\cdot 4+1)}=\frac{40}{27}$$

To‘g‘ri javob $\frac{40}{27}$.

22. Faraz qilaylik $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funksiya barcha haqiqiy x lar uchun quyidagi

$$f(x^2+x+3)+2f(x^2-3x+5)=6x^2-10x+17$$

tenglikni qanoatlantirsa, $f(85)$ ning qiymatini yozing.

____

Yechish: Belgilaymizki $p(x)=x^2+x+3$ va $q(x)=x^2-3x+5$ bo‘lsin. Shuningdek

$$p(1-x)=(1-x)^2+(1-x)+3=q(x)$$

$$q(1-x)=(1-x)^2-3(1-x)+5=p(x)$$

va

$6(1-x)^2-10(1-x)+17=6x^2-2x+13.$

U holda

$6x^2-2x+13=f\big(p(1-x)\big)+2f\big(q(1-x)\big)=f\big(q(x)\big)+2f(p(x)).$

Bu tenglamalar sistemasidan

$$\begin{cases} f\big(p(x)\big)+2f\big(q(x)\big)=6x^2-10x+17\\ f\big(q(x)\big)+2f\big(p(x)\big)=6x^2-2x+13\end{cases}$$

quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$3f\big(p(x)\big) = 2\Big(f\big(q(x)\big) + 2f\big(p(x)\big)\Big) - \Big(f\big(p(x)\big) + 2f\big(q(x)\big)\Big) =$$

$$= 2(6x^2 - 2x + 13) - 6x^2 - 10x + 17 = 6x^2 + 6x + 9 \text{ yoki}$$

$$f\big(p(x)\big) = 2p(x) - 3.$$

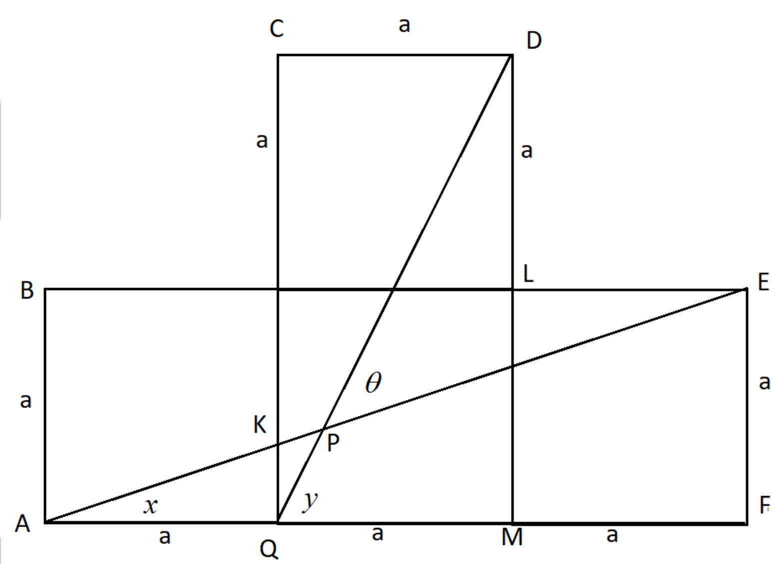
$p(x) = x^2 + x + 3 \geq \frac{11}{4}$ bo‘lganligidan ixtiyoriy $y \geq \frac{11}{4}$ lar uchun shunday x nuqtalar mavjudki $p(x) = y$ bo‘ladi va shuning uchun ixtiyoriy $y \geq \frac{11}{4}$ uchun

$$f(y) = f\big(p(x)\big) = 2p(x) - 3 = 2y - 3$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Shunday qilib $f(85) = 2 \cdot 85 - 3 = 167$.

23. Rasmda bir xil o‘chamdagi 4 ta kvadratlar tasvirlangan. θ burchakni toping.

θ= ________________



Yechish:

Chizmadan zarur nuqta va burchaklarni belgilab olamiz.

$\angle EAQ = x$ deb belgilash kiritsak,
$\angle QKA = 90 - x$ bundan esa
$\angle QKP = 90 + x$ bo‘ladi va huddi shuningdek $\angle DQM = y$ desak $\angle CQP = 90 - y$ bo‘ladi bundan esa $\theta = \angle QPK = 180 - (90 + x + 90 - y) = y - x$

Endi AEF to‘g‘ri burchakli uchburchakdan burchak x ni topsak $tgx = \frac{1}{3}$ va DQM uchurchakdan foydalanib y burchakni aniqlaymiz $tgy = 2$

Yuqorida aniqlaganimiz $tg\theta = tg(y - x) = \frac{tgy - tgx}{1 + tgx \cdot tgy} = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{3}} = 1$. Bundan esa

$\theta = 45°$ ekanligi kelib chiqadi.

24. Quyidagi yig‘indini qiymatini toping

$$\frac{9^{1/1000}}{9^{1/1000}+3}+\frac{9^{2/1000}}{9^{2/1000}+3}+\frac{9^{3/1000}}{9^{3/1000}+3}+\ldots+\frac{9^{998/1000}}{9^{998/1000}+3}+\frac{9^{999/1000}}{9^{999/1000}+3}$$

____

Yechish: Yig‘indidagi birinchi qo‘shiluvchi bilan oxirgi qo‘shiluvchini alohida qo‘shib chiqamiz.

$$\frac{9^{1/1000}}{9^{1/1000}+3}+\frac{9^{999/1000}}{9^{999/1000}+3}=\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}+\frac{9^{1-\frac{1}{1000}}}{9^{1-\frac{1}{1000}}+3}=\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}+\frac{9\div 9^{\frac{1}{1000}}}{9\div 9^{\frac{1}{1000}}+3}=$$

$$=\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}+\frac{9}{3\cdot 9^{\frac{1}{1000}}+9}=\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}+\frac{3}{9^{\frac{1}{1000}}+3}=\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}+\left(1-\frac{9^{\frac{1}{1000}}}{9^{\frac{1}{1000}}+3}\right)=1$$

Ikkinchi qo‘shiluvchi va oxiridan bitta oldingi qo‘shiluvchi uchun

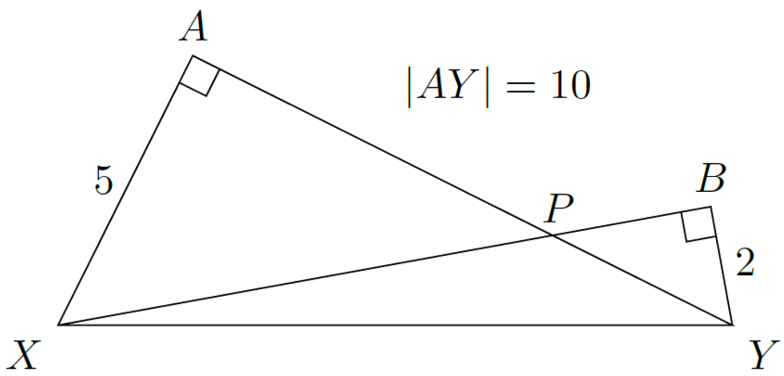
$$\frac{9^{2/1000}}{9^{2/1000}+3}+\frac{9^{992/1000}}{9^{998/1000}+3}=\frac{9^{2/1000}}{9^{2/1000}+3}+\left(1-\frac{9^{2/1000}}{9^{2/1000}+3}\right)=1$$

Bu jarayonni davom ettirsak o‘rtadagi qo‘shiluvchi $\frac{1}{2}$ ekanligi ma’lum bo’ladi

$$\frac{9^{500/1000}}{9^{500/1000}+3}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$$

500-hadgacha 499 ta va undan keyin 499 qo‘shiluvchi bo‘lganligidan va bu 998 ta qo‘shuluvchilardan har ikkitasi o‘zaro qo‘shilib 499 ta 1 ni tashkil qilishidan yig‘indining qiymati 499,5 ekanligi kelib chiqadi.

25. Ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklar rasmdagidek keltirilgan. AY kesma uzunligi 10, AX esa 5 va BY kesma uzunligi 2 ekanligi ma’lum bo‘lsa, ΔXPY uchburchak yuzini toping.

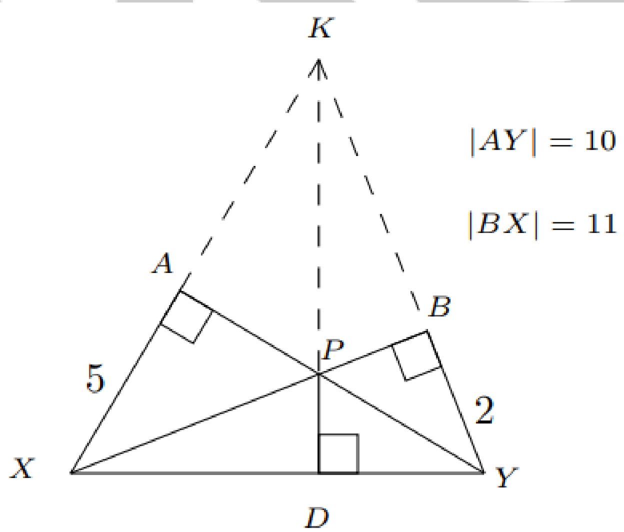


ΔXPY =________________________________

Yechish: To‘g‘ri burchakli uchburchaklar uchun Pifagor teoremasini qo‘llasak, XAY uchburchakdan $|XY| = \sqrt{125}$ ekanligini topamiz. XBY uchburchakdan esa $|XB| = 11$ ekanligi topiladi. Bundan tashqari uchburchak yuzi asosi va asosga tushurilgan balandlikning ko‘paytmasining yarmiga teng. P nuqtadan XY tomonga balandlik tushiramiz va XX bilan tutashgan nuqtani D bilan belgilaymiz.

$$S_{PXY} = \frac{1}{2}|XY|\cdot|PD| = \frac{1}{2}|XP|\cdot|BY| = \frac{1}{2}|YP|\cdot|AX|$$

Endi A va B nuqtalardan davom ettirib yagona uchburchak hosil qilamiz.



SHunda

$|BY| = 2,\ |AX| = 5$ va $|XY| = \sqrt{125}$ ma’lum ekanligidan, masala PD yoki XP yoki YP ni topishga kelib qoldi.

Uchburchak XPD va XYB uchburchaklar o‘xshashdir, $\Delta XPD \sim \Delta XYB$. O‘xshashlikdan esa

$$\frac{|KD|}{|YA|} = \frac{|XD|}{|XA|} \Rightarrow \frac{|KD|}{10} = \frac{|XD|}{5}$$

Bundan esa

$$|XD| = \frac{1}{2}|KD|$$

Huddi shuningdek

$$\frac{|KD|}{|XB|} = \frac{|YD|}{|YB|} \Rightarrow |YD| = \frac{2}{11}|KD|$$

U holda

$$|XD| + |YD| = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{11}\right)|KD| = \frac{15}{22}|KD|$$

Boshqa tomondan esa

$$|XD| + |YD| = |XY| = 5\sqrt{5}$$

Shuning uchun

$$\frac{15}{22}|KD| = 5\sqrt{5}$$

Bundan esa

$$|KD| = \frac{22}{3}\sqrt{5} \qquad |XD| = \frac{11}{3}\sqrt{5} \qquad |YD| = \frac{4}{3}\sqrt{5}$$

Bundan tashqari uchburchak KXY da quyidagi xossa o‘rinli

$$|KD| \cdot |PD| = |XD| \cdot |YD|$$

Bundan esa quyidagini topamiz:

$$|PD| = \frac{|XD| \cdot |YD|}{|KD|} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Shunday qilib

$$S_{XPY} = \frac{1}{2}|XY| \cdot |PD| = \frac{25}{3}$$

26. Aytaylik, ixtiyoriy musbat, butun n son uchun $f(n) = 2n^3$ o‘rinli bo‘lsin. U holda ixtiyoriy $m \geq 3$ toq son uchun, $f(f(f(m)))$ soni 2^k ga qoldiqsiz bo‘linadigan k ning eng katta musbat butun qiymatini toping.

____

Yechish: Shartga asosan $f(m) = 2m^3$, $f(2m^3) = 2(2m^3)^3 = 2^4m^9$ va $f(2^4m^9) = 2(2^4m^9)^3 = 2^{13}m^{27}$ bo‘lishi ma’lum. Demak $2^{13}m^{27}$ soni 2^k songa qoldiqsiz bo‘linsa, demak k ning eng katta qiymati 13 ekanligi kelib chiqadi.

27. To‘rtta sigirning har biri normal yoki mutantdir (mutatsiyaga uchragan). Oddiy sigirlarning 4 ta oyoqlari bor va har doim yolg‘on gapiradi. Mutant sigirlarning 3 yoki 5 ta oyoqlari bor va har doim haqiqatni aytadi. Ularning nechta oyoqlari borligi so‘ralganda, ularning javoblari 13, 14, 15 va 16. Bu to‘rtta sigirning umumiy oyoqlari sonini toping.

____

Yechish: Barcha to‘rtala javoblar ham bir-biridan farqli ekanligidan, kamida ulardan uchtasi xato bo‘ladi. Agar to‘rtala javoblar ham xato bo‘lsa, u holda to‘rtala sigirlar ham normal sigirlar ekanligi kelib chiqadi va ularning oyoqlari soni 16 ta bo‘ladi. Bu esa javoblardan bittasining rost ekanligini tasdiqlaydi. Demak, bitta sigir mutant bo‘lib chiqadi. Shuning uchun bitta sigirning gapi rost bo‘lib qoladi. Haqiqatan uchta normal sigirlarda oyoqlari soni 12 ta bo’ladi. Bitta javobning rost bo‘lishi uchun mutant sigirda esa 3 ta oyoq bo‘lishi kerak. Bu esa shartga mos tushadi. Demak to‘g‘ri javob 15 ta.

28. Faraz qilaylik, $16^{2013} = a^b$, bunda a va b musbat butun sonlar. a ning bo‘lishi mumkin bo‘lgan qiymatlari soni nechta?

____

Yechish: $16^{2013} = 2^{4\cdot 2013}$ bo‘lganligi uchun a ham 2^k ko‘rinishidagi son bo‘lishi kerak, bu yerda k musbat butun son bo‘lib, $4 \cdot 2013 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$ ning bo‘luvchisi hisoblanadi. k ni tub ko‘paytuvchilga ajratilganda **ko‘pi bilan** 2 ta 2, bitta 3, bitta 11 va bitta 61 bo‘lishi mumkin. Shuning uchun k ning $(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24$ ta mumkin bo‘lgan qiymatlari mavjud bo‘ladi va shuning uchun a ning ham mumkin bo‘lgan qiymatlari soni 24 ta bo‘lishi kelib chiqadi. To‘g‘ri javob 24 ta.

29. x, y va z haqiqiy sonlar uchun $(x^2+y^2+z^2)^2 \leq k(x^4+y^4+z^4)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan $k \in \mathbb{R}$ ning eng kichik qiymatini toping.

k= ___________________

Yechish: Berilgan tengsizlikni quyidagicha yozib olishimiz mumkin

$$(k-3)(x^4+y^4+z^4)+(y^2-z^2)^2+(z^2-x^2)^2+(x^2-y^2)^2 \geq 0$$

Ravshanki k ning eng kichik qiymati 3 bo‘lishi mumkin ekan. To‘g‘ri javob 3.

30. Agar hozir seshanba, soat 10:00 bo‘lsa, bundan 2016 soat avval haftaning qaysi kuni bo‘lgan?

____

Yechish: $2016 = 7 \cdot 12 \cdot 24$ ekanligidan to‘g‘ri javob soat 10:00 Seshanba bo‘ladi, ya’ni savolda aytilgan kundan 12 hafta oldingi seshanba.